$\boxed{3.362}$

ρ

ε

Пусть радиус внутренней сфры R_1, внешней - R_2

Рассмотрим циркуляцию H по произвольной поверхности, находящейся на сфере радиуса r ($R_1 < r < R_2$)

$$\int H\,dl = \int j\,dS + \frac{d}{dt}\int D\,dS \qquad D = E\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0$$

закон Ома: $j = \frac{1}{\rho}\cdot E \qquad E = j\cdot\rho \qquad D = \varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\rho\cdot j$

$$\int H\,dl = \int j\,dS + \frac{d}{dt}\int D\,dS = \int j\,dS + \varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\rho\cdot\frac{d}{dt}\int j\,dS \qquad \int j\,dS = I$$

$$\int H\,dl = I(t) + \left(\frac{d}{dt}I(t)\right)\cdot\left(\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\rho\right) \qquad (1)$$

$\int j\,dS = I$ для сферы радиуса r $S = 4\cdot\pi\cdot r^2 \qquad I = 4\cdot\pi\cdot r^2\cdot j \qquad j = \frac{1}{\rho}\cdot E \qquad I = 4\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(\frac{1}{\rho}\cdot E(r)\right)$

Применим теорему Гаусса для E(r) $\qquad E(r) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2} \qquad I = 4\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left[\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q(r)}{r^2}\right)\right] = \frac{1}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot q(r)$

$$I = -\frac{dq(r)}{dt} \qquad \frac{q(r)}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0} = -\frac{dq(r)}{dt} \qquad \int\frac{1}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\,dt = -\int\frac{1}{q(r)}\,dq(r) \qquad q(r) = q_0\cdot\exp\left(-\frac{t}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\right)$$

$$I(t) = \frac{d}{dt}q_0\cdot\exp\left(-\frac{t}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\right) = \frac{-q_0}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\right)$$

Подставив I(t) в (1), получаем:

$$\int H\,dl = \frac{-q_0}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\right) + \varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\rho\cdot\frac{d}{dt}\frac{-q_0}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\right)$$

$$\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\rho\cdot\frac{d}{dt}\frac{-q_0}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\right) = \frac{d}{dt}-q_0\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\right) = \frac{q_0}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho}\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0\right)$$

$$\int H\,dl = \frac{-q_0}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\right) + \frac{q_0}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho}\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0\right) = 0 \qquad I_{см} = I \qquad j_{см} = j$$

$$I_{см} = \frac{q_0}{\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}\cdot\exp\left(\frac{-t}{\rho}\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0\right) = \frac{q}{\left(\rho\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0\right)}$$

$\boxed{3.389}$

$U(t) = \varepsilon\cdot t$

$\varepsilon = 100$

$L = 5\cdot 10^{-2}$

$q = e$

$$A = \int 1\,dA \qquad dA = F\cdot dx = E\cdot q\cdot dx = \frac{U}{L}\cdot q\cdot dx = \frac{\varepsilon\cdot t}{L}\cdot q\cdot dx$$

$$F = q\cdot E \qquad a = \frac{F}{m} \qquad a = \frac{q\cdot E}{m} = \frac{q\cdot U}{m\cdot L} = \frac{q\cdot\varepsilon\cdot t}{m\cdot L} \qquad x = \int\left(\int\frac{q\cdot\varepsilon\cdot t}{m\cdot L}\,dt\right)dt = \frac{1}{6}\cdot q\cdot\varepsilon\cdot\frac{t^3}{m\cdot L} \qquad t = \sqrt[3]{6\cdot x\cdot m\cdot\frac{L}{q\cdot\varepsilon}}$$

$$A = \int_0^L\frac{\varepsilon\cdot t}{L}\cdot q\,dx = \int_0^L\frac{\varepsilon\cdot q}{L}\cdot\sqrt[3]{6\cdot x\cdot m\cdot\frac{L}{q\cdot\varepsilon}}\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\left(L^2\cdot\frac{m}{q\cdot\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}}}{m\cdot L^2}\cdot q^2\cdot\varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{6}$$

$$\frac{m\cdot v^2}{2}=A \qquad \frac{m\cdot v^2}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(L^2\cdot\frac{m}{q\cdot\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}}}{m\cdot L^2}\cdot q^2\cdot\varepsilon^2\cdot\sqrt[3]{6} \qquad v^2=\frac{3}{2}\cdot\left(L^2\cdot\frac{m}{q\cdot\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot q^2\cdot\varepsilon^2\cdot\frac{\sqrt[3]{6}}{m^2\cdot L^2}$$

$$v^6=\left[\frac{3}{2}\cdot\left(L^2\cdot\frac{m}{q\cdot\varepsilon}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot q^2\cdot\varepsilon^2\cdot\frac{\sqrt[3]{6}}{m^2\cdot L^2}\right]^3=\frac{81}{4}\cdot\frac{L^2}{m^2}\cdot q^2\cdot\alpha^2 \qquad v^3=\frac{9}{2}\cdot\frac{L}{m}\cdot q\cdot\varepsilon \qquad v=\sqrt[3]{\frac{9}{2}\cdot\frac{L}{m}\cdot e\cdot\varepsilon}$$

$\boxed{3.402}$

E v_0

B

$\frac{q}{m}$

На заряд действуют электрическая $F_{эл}$ и магнитная $F_м$ силы.

$F_м$ закручивает траекторию заряда, $F_{эл}$ - обеспечивает поступательное движение

$$F_{эл}=E\cdot q \qquad a_{эл}=\frac{E\cdot q}{m}$$

$$F_м=q\cdot v_0\cdot B \qquad F_м=\frac{m\cdot v_0^{\,2}}{R} \qquad \frac{m\cdot v_0^{\,2}}{R}=q\cdot v_0\cdot B \qquad R=m\cdot\frac{v_0}{q\cdot B}$$

пусть T - время одного полного оборота заряда под действием $F_м$

$$T=\frac{2\cdot\pi\cdot R}{v_м}=2\cdot\pi\cdot m\cdot\frac{1}{q\cdot B}$$

t - время n оборотов $\quad t=n\cdot T \qquad t=2\cdot\pi\cdot n\cdot m\cdot\frac{1}{q\cdot B}$

за время t заряд сместится на расстояние y_n от точки O

$$y_n=\frac{a_{эл}\cdot t^2}{2} \qquad y_n=\frac{E\cdot q}{2\cdot m}\cdot\left(2\cdot\pi\cdot n\cdot m\cdot\frac{1}{q\cdot B}\right)^2=2\cdot\pi^2\cdot n^2\cdot\frac{m}{q}\cdot\frac{E}{B^2}$$

в момент времени t отношение $\frac{v_0}{v_{эл}}$ будет являться тангенсом угла наклона траектории к оси y

$$v_{эл}=a_{эл}\cdot t=\frac{E\cdot q}{m}\cdot t \qquad \frac{v_0}{v_{эл}}=\frac{v_0}{\frac{E\cdot q}{m}\cdot t}=\frac{v_0}{\frac{E\cdot q}{m}\cdot\left(2\cdot\pi\cdot n\cdot m\cdot\frac{1}{q\cdot B}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0}{E\cdot\pi\cdot n}\cdot B$$

$\boxed{4.220}$

ν

σ

ε

Рассмотрим циркуляцию H по произвольной поверхности S

$$\int H\,dl=\int j\,dS+\frac{d}{dt}\int D\,dS \qquad [\nabla\ H]=j+\frac{d}{dt}D$$

$$j=E\cdot\sigma \qquad D=\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot E \qquad E=E_0\cdot\cos(\omega\cdot t-k\cdot x+\varphi)$$

$[\nabla\ H]=0$ (нет стационарных полей)

$$0=E\cdot\sigma+\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{d}{dt}E=E\cdot\sigma+\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{d}{dt}E_0\cdot\cos(\omega\cdot t-k\cdot x+\varphi)=E\cdot\sigma-\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\omega\cdot E_0\cdot\sin(\omega\cdot t-k\cdot x+\varphi)=j+j_{см}$$

$$E_0\cdot\sin(\omega\cdot t-k\cdot x+\varphi)\cdot\sigma=\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\omega\cdot E_0\cdot\sin(\omega\cdot t-k\cdot x+\varphi)$$

$$j=j_{см} \qquad \frac{j}{j_{см}}=\frac{\sigma}{\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\omega}=\frac{\sigma}{2\cdot\pi\cdot\nu\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon_0}$$

$\boxed{4.224}$

$$\vec{E}=\overrightarrow{E_m}\cdot\cos\left(\omega\cdot t-\overrightarrow{(k\cdot r)}\right) \qquad \vec{S}=\left[\vec{E}\cdot\vec{H}\right] \qquad \bar{S}=\frac{\left|\vec{S}\right|}{2}$$

Уравнения Максвелла в диф. форме для Э/М волны: Пусть: $E_y = E\cdot\cos(\omega\cdot t - k\cdot x + \alpha_1)$

$H_z = H\cdot\cos(\omega\cdot t - k\cdot x + \alpha_2)$

$$\frac{d}{dx}E_y = -\mu\cdot\mu_0\cdot\frac{d}{dt}H_z \qquad \frac{d}{dx}H_z = -\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{d}{dt}E_y$$

$$\frac{d}{dx}E\cdot\cos(\omega\cdot t - k\cdot x + \alpha_1) = -\mu\cdot\mu_0\cdot\frac{d}{dt}H\cdot\cos(\omega\cdot t - k\cdot x + \alpha_2) \rightarrow -E\cdot\sin(-\omega\cdot t + k\cdot x - \alpha_1)\cdot k = -\mu\cdot\mu_0\cdot H\cdot\sin(-\omega\cdot t + k\cdot x - \alpha_2)\cdot\omega$$

$$H = \frac{k\cdot E}{\mu_0\cdot\mu\cdot\omega} \qquad \bar{S} = \frac{1}{2}\cdot E^2\cdot\frac{k}{\mu_0\cdot\mu\cdot\omega} \qquad \mu_0\cdot\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad \mu_0 = \frac{1}{c^2\cdot\varepsilon_0} \qquad \mu = 1 \qquad \bar{S} = \frac{1}{2}\cdot E^2\cdot\frac{k\cdot c^2\cdot\varepsilon_0}{\omega}$$

$\boxed{4.232}$

$R = 6\cdot 10^{-2}$

$\omega = 10^3$

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$$W_{эл} = \frac{\varepsilon_0\cdot E(t)^2}{2}\cdot V \qquad V = \pi\cdot R^2\cdot h \qquad U(t) = U_0\cdot\sin(\omega\cdot t) \qquad E = \frac{U(t)}{h} \qquad W_{эл} = \frac{\varepsilon_0\cdot(U_0\cdot\sin(\omega\cdot t))^2}{2\cdot h^2}\cdot(\pi\cdot R^2\cdot h)$$

$$W_м = \int \frac{B^2}{2\cdot\mu_0}\,dV$$

Рассмотрим циркуляцию H по кругу радиуса r, параллельному одной из обкладок конденсатора

$$j = 0 \qquad \int H\,dl = \frac{d}{dt}\int D\,dS \qquad D = \varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot E \qquad H = \frac{B}{\mu_0}$$

$$\int H\,dl = \frac{B}{\mu_0}\cdot 2\cdot\pi\cdot r$$

$$\frac{d}{dt}\int D\,dS = \frac{d}{dt}D\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{d}{dt}\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot E\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{d}{dt}\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\left(\frac{U_0\cdot\sin(\omega\cdot t)}{h}\right)\cdot\pi\cdot r^2 = \varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot U_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\frac{\omega}{h}\cdot\pi\cdot r^2$$

$$\frac{B}{\mu_0}\cdot 2\cdot\pi\cdot r = \varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot U_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\frac{\omega}{h}\cdot\pi\cdot r^2 \qquad B(r) = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\cdot U_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\omega\cdot r\cdot\frac{\mu_0}{h}$$

dV - объем кольца, толшиной dr

$$dV = \pi\cdot r^2\cdot h - \pi\cdot(r + dr)^2\cdot h = 2\cdot\pi\cdot h\cdot r\cdot dr - \pi\cdot h\cdot dr^2 \qquad dV = 2\cdot\pi\cdot h\cdot r\cdot dr$$

$$W_м = \int_0^R \frac{B^2}{2\cdot\mu_0}\,dV = \int_0^R \left(\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\cdot U_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\omega\cdot r\cdot\frac{\mu_0}{h}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cdot\mu_0}\cdot(2\cdot\pi\cdot h\cdot r)\,dr \qquad W_м = \frac{1}{16}\cdot\varepsilon_0^2\cdot U_0^2\cdot\cos(\omega\cdot t)^2\cdot\omega^2\cdot R^4\cdot\frac{\mu_0}{h}\cdot\pi$$

$$\frac{W_м}{W_{эл}} = \frac{\left(\frac{1}{16}\cdot\varepsilon_0^2\cdot U_0^2\cdot\cos(\omega\cdot t)^2\cdot\omega^2\cdot R^4\cdot\frac{\mu_0}{h}\cdot\pi\right)}{\left[\frac{\varepsilon_0\cdot(U_0\cdot\sin(\omega\cdot t))^2}{2\cdot h^2}\cdot(\pi\cdot R^2\cdot h)\right]} \qquad \frac{Wмакс_м}{Wмакс_{эл}} = \frac{\left(\frac{1}{16}\cdot\varepsilon_0^2\cdot U_0^2\cdot\omega^2\cdot R^4\cdot\frac{\mu_0}{h}\cdot\pi\right)}{\left[\frac{\varepsilon_0\cdot U_0^2}{2\cdot h^2}\cdot(\pi\cdot R^2\cdot h)\right]} = \frac{1}{8}\cdot\varepsilon_0\cdot\omega^2\cdot R^2\cdot\mu_0$$

$\boxed{4.233}$

$\omega = 10^3$

$R = 6\cdot 10^{-2}$

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$$W_м = \int \frac{B^2}{2\cdot\mu_0}\,dV \qquad B = \mu_0\cdot n\cdot I \qquad W_м = \frac{(\mu_0\cdot n\cdot I)^2}{2\cdot\mu_0}\cdot(\pi R^2\cdot h) = \frac{1}{2}\cdot\mu_0\cdot n^2\cdot I^2\cdot\pi\cdot R^2\cdot h$$

$$W_{эл} = \int \frac{\varepsilon_0\cdot E^2}{2}\,dV$$

Рассмотрим циркуляцию E по кругу радиуса r (r < R), параллельному боковой стороне соляноида

$$\int E\,dl = -\frac{d}{dt}\int B\,dS \qquad E(r)\cdot 2\cdot\pi r = -\frac{d}{dt}\left[\left(\mu_0\cdot n\cdot I\right)\cdot\left(\pi\cdot r^2\right)\right]$$

Пусть ток I меняется от t по закону $\quad I = I_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$

$$E(r)\cdot 2\cdot\pi r = \pi\cdot r^2\cdot\mu_0\cdot n\cdot\frac{d}{dt}\left(I_0\cdot\sin(\omega\cdot t)\right) \rightarrow 2\cdot E(r)\cdot\pi\cdot r = -\pi\cdot r^2\cdot\mu_0\cdot n\cdot I_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\omega \qquad E(r) = \frac{-1}{2}\cdot\mu_0\cdot n\cdot I_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\omega\cdot r$$

dV - объем кольца, толшиной dr

$$dV = \pi\cdot r^2\cdot h - \pi\cdot(r + dr)^2\cdot h = 2\cdot\pi\cdot h\cdot r\cdot dr - \pi\cdot h\cdot dr^2 \qquad dV = 2\cdot\pi\cdot h\cdot r\cdot dr$$

$$W_{эл} = \int_0^R \frac{\varepsilon_0\cdot E^2}{2}\,dV = \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot\mu_0\cdot n\cdot I_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\omega\cdot r\right)^2\cdot(2\cdot\pi\cdot h\cdot r)\,dr = \frac{1}{16}\cdot R^4\cdot\varepsilon_0\cdot\mu_0^2\cdot n^2\cdot I_0^2\cdot\cos(\omega\cdot t)^2\cdot\omega^2\cdot\pi\cdot h$$

$$\frac{W_{эл}}{W_{м}} = \frac{\left(\frac{1}{16}\cdot R^4\cdot\varepsilon_0\cdot\mu_0^2\cdot n^2\cdot I_0^2\cdot\cos(\omega\cdot t)^2\cdot\omega^2\cdot\pi\cdot h\right)}{\left[\frac{1}{2}\cdot\mu_0\cdot n^2\cdot\left(I_0\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)^2\cdot\pi\cdot R^2\cdot h\right]} \qquad \frac{Wмакс_{эл}}{Wмакс_{м}} = \frac{\left(\frac{1}{16}\cdot R^4\cdot\varepsilon_0\cdot\mu_0^2\cdot n^2\cdot I_0^2\cdot\omega^2\cdot\pi\cdot h\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot\mu_0\cdot n^2\cdot I_0^2\cdot\pi\cdot R^2\cdot h\right)} = \frac{1}{8}\cdot R^2\cdot\varepsilon_0\cdot\mu_0\cdot\omega^2$$

4.238 < TODO: нужен рисунок >

$\varphi_2 > \varphi_1$

Вектор E направлен от верхнего провода к нижнему, т. к. $\varphi_2 > \varphi_1$

Ток по цепи движется против часовой стрелки, следовательно между проводами вектор H направлен за плоскость рисунка 4.40

$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ Направление правого поворота от E к H указывает направо, следовательно справа - потребитель, т. к. к нему переносится энергия, слева - источник

4.249

$a = 0.1\cdot 10^{-9}$

$\omega = 6.5\cdot 10^{14}$

$q = e$

$$P = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{2\cdot q^2\cdot a^2}{3\cdot c^3} \qquad a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

Пусть x(t) имеет вид: $\quad x(t) = x_0\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi)$

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x_0\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi) \rightarrow a(t) = -x_0\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi)\cdot\omega^2$$

$$P = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{2\cdot q^2\cdot\left(-x_0\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi)\cdot\omega^2\right)^2}{3\cdot c^3}$$

Среднее значение для sin(x) на одном периоде равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \overline{\sin(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \overline{\sin(x)^2} = \frac{1}{2} \qquad \overline{P} = \frac{P_{max}}{2}$